Задание № 8 Квадратичные формы

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**А30.1.1 Определение.** Многочлен степени  от переменных  называется *формой* степени , если все слагаемые имеют одну и ту же степень относительно совокупности переменных .

**А30.1.2** **Примеры.** 1) форма первой степени (*линейная форма*) от переменных имеет вид ;

2) форма второй степени (*квадратичная форма*) от переменных имеет вид ;

3) форма третьей степени от переменных имеет вид .

**А30.1.3 *Следствие.*** 1) Линейную форму можно рассматривать как скалярное произведение вектора  и вектора ; 2) Квадратичную форму также можно рассматривать как скалярное произведение , где симметричная матрица  называется *матрицей квадратичной формы*. Кроме того, квадратичную форму можно представить как произведение матриц .

**А30.1.4** ***Замечание.*** Поскольку  и  то сама квадратичная форма  в развернутом виде выглядит так: .

**30.2 Невырожденные линейные замены**

**А30.2.1** ***Замечание.*** Рассмотрим линейное преобразование переменных 



 (\*)

………………………..



с невырожденной матрицей . Очевидно, что равенства (\*) можно записать в следующем матричном виде: .

**А30.2.2 Теорема (о линейных преобразованиях квадратичных форм)** Квадратичная форма от  неизвестных , имеющая матрицу  после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей  превращается в квадратичную форму о новых неизвестных с матрицей .

**А30.2.3 Пример.** Матрицей квадратичной формы  является . Сделаем линейную замену переменных  с матрицей . Согласно теореме А29.2.2 получим квадратичную форму с матрицей , то есть, квадратичную форму .

**30.3 Канонический и нормальный виды квадратичной формы**

**А30.3.1 Определение:** Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если она имеет вид . Если при этом все коэффициенты , то говорят, что квадратичная форма имеет *нормальный вид*.

**А30.3.2 Теорема (о каноническом виде квадратичной формы)** Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду некоторым линейным преобразованием с матрицей, имеющей ненулевой определитель.

*Доказательство:* Допустим сначала, что среди слагаемых квадратичной формы  есть хотя бы один квадрат. Без ограничения общности можно считать, что это квадрат первой переменной: . Тогда выражение



содержит такие же слагаемые с неизвестным , как и квадратичная форма . Значит, разность



будет квадратичной формой, не содержащей переменной .

Тогда . Сделаем линейную замену переменных , тогда . Если квадратичная форма  также содержит квадрат хотя бы одной из переменных, то с ней можно поступить аналогичным образом и получить квадратичную форму

.

Если квадратичная форма  снова содержит хотя бы один квадрат, то с ней также можно поступить аналогично и т.д.

Пусть на каком-то этапе квадратичная форма  не содержит ни одного квадрата неизвестных. Допустим, что среди слагаемых квадратичной формы  есть слагаемое . Рассмотрим линейное преобразование

, , (при ).

Тогда  и в квадратичной форме появятся слагаемые, содержащие квадраты.

Каждому из линейных преобразований соответствует некоторая матрица. Пусть последовательно выполняемым линейным преобразованиям соответствуют матрицы , тогда композиции всех проведенных преобразований будет соответствовать матрица . *Теорема доказана.*

**А30.3.3 Пример:** Привести к каноническому виду квадратичную форму .

*Решение:* Поскольку в форме отсутствуют квадраты, выполним преобразование , , :





Полагаем : .

.

Полагаем : .

Можно также сделать линейное преобразование:

.

**А30.3.4 Теорема (о каноническом виде квадратичной формы)** Одним из канонических видов квадратичной формы является , где  - собственные числа матрицы, а соответствующее линейное преобразование при этом задается матрицей , где  - собственный вектор единичной длины, соответствующий собственному числу .

**А30.3.6** ***Следствие.*** Любая квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду линейной заменой .

**31.1 Определенные квадратичные формы**

**А31.1.1 Определение.** Квадратичная форма  называется:

- *неотрицательно определенной*, если для любых значений имеет место неравенство , и при этом существует хотя бы один ненулевой набор чисел  такой, что 

- *положительно определенной*, если она неотрицательно определена и обращается в ноль только при ;

- *неположительно определенной*, если для любых значений имеет место неравенство  и при этом существует хотя бы один ненулевой набор чисел  такой, что ;

- *отрицательно определенной*, если она неположительно определена и обращается в ноль только при ;

- *неопределенной* если при различных значениях переменной она может принимать как положительные, так и отрицательные значения;

**А31.1.2 Примеры**: 1)  - неотрицательно определенная форма, так как , но , например, при ; 2)  - положительно определенная форма, так как  и  только при ; 3)  - неположительно определенная форма, так как , но , например, при , .

**А31.1.3 Теорема (об определенных квадратичных формах)** Квадратичная форма:

- неотрицательно определена, когда все собственные числа ее матрицы неотрицательны и хотя бы одно равно нулю;

- положительно определена, когда все собственные числа ее матрицы положительны;

- неположительно определена, когда все собственные числа ее матрицы неположительны и хотя бы одно равно нулю;

- отрицательно определена, когда все собственные числа ее матрицы отрицательны;

**А31.1.4** ***Следствие.*** Квадратичная форма от переменных положительна определена, если она имеет ранг  и приводится к какому-либо каноническому виду с положительными коэффициентами при квадратах. Квадратичная форма от переменных отрицательна определена, если она имеет ранг  и приводится к какому-либо каноническому виду с отрицательными коэффициентами при квадратах.

**31.2 Критерий Сильвестра**

**А31.2.1 Определение.** Главными минорами матрицы , а если эта матрица симметрична, то и главными минорами соответствующей квадратичной формы называются: , , ,…, .

**А31.2.2 Теорема (критерий Сильвестра положительной определенности)** Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.

**А31.2.3** **Теорема (критерий Сильвестра отрицательной определенности)** Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда  и далее знаки главных миноров чередуются.

**А31.2.4** ***Следствие.*** 1) Квадратичная форма неотрицательно определена не будучи положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны, но среди них есть хотя бы один, равный нулю.

**А31.2.5 Пример** Проверить, будет ли положительно определенной квадратичная форма 

*Решение*: Составим матрицу квадратичной формы: **** . Вычислим ее главные миноры: 5 >0, , . Квадратичная форма положительно определена.

**Самостоятельная работа:**

1. Найти канонический вид квадратичных форм и соответствующую матрицу линейного преобразования: а) ; б) ;
2. Проверить, будут ли следующие формы положительно определенными, неотрицательно определенными, неположительно определенными, отрицательно определенными или квадратичными формами общего вида: а)  ; б) ; в) ;

**Ответы:**

1. а) ; ; б) ; ;
2. а) неотрицательно определена; б) положительно определена; в) неположительно определена;